Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 16 - 2/11 (¡y ya estamos en noviembre!)

En las clases previas nos dedicamos, entre otras cosas, a encontrar soluciones de problemas que pueden escribirse en la forma $Lu = Nu$. En particular, cuando se trata de un caso no resonante, se los puede plantear como un problema de punto fijo

$$u = T(u) := L^{-1}N(u)$$

y la herramienta más básica para encontrar soluciones es el teorema de Banach, que se demuestra a partir de la iteración

$$u_{n+1} = T(u_n)$$

donde u_0 es un elemento cualquiera del espacio. Eso, claro, si tenemos la suerte de que T sea una contracción: a lo mejor acertamos las ocho ¡y quién te ataja ese día, corazón! Pero no no siempre "acertamos las ocho", así que no viene mal tener a mano otros argumentos, para cuando Banach nos entre a fallar. Una primera situación, no muy lejana a la anterior, es cuando sabemos que T tiene un punto fijo u en cierta región donde la diferencial tiene norma menor que 1, ya que en ese caso uno sabe que $\|DT(z)\| \leq c < 1$ en cierta bola $\overline{B_r(u)}$. Es claro que allí T resulta contractiva y además

$$\|T(y) - u\| = \|Ty - Tu\| \leq c\|y - u\| \leq r,$$

de donde $T(\overline{B_r(u)}) \subset \overline{B_r(u)}$. Esto no parece gran cosa cuando no conocemos u de antemano, aunque generaliza una situación muy conocida en los sistemas dinámicos discretos. Para fijar ideas, pensemos el caso unidimensional, con $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave; en ese caso, si x es un punto fijo tal que $|T'(x)| \neq 1$, entonces se dice que x es hiperbólico; en particular, si $|T'(x)| < 1$ entonces x es un atractor local, es decir, existe un entorno I de x tal que $T^n(y) \to x$ para todo $y \in I$, donde T^n es la notación habitual para la composición, es decir, $T^0(y) = y$, $T^{n+1}(y) = T(T^n(y))$.

Más en general, se define la órbita (positiva) de un punto $x \in \mathbb{R}$ como el conjunto $\{T^n(x) : n \geq 0\}$. Si $T^k(x) = x$, se dice que el punto es periódico; si además $T^j(x) \neq x$ para $0 < j < k$ entonces su período es k. Obviamente, el caso $k = 1$ corresponde a los puntos fijos, que son los que nos interesan ahora, aunque los otros tienen su interés: por ejemplo, si T es el operador de Poincaré asociado a cierto problema, los puntos fijos corresponden a soluciones periódicas, mientras que los puntos periódicos que no son fijos corresponden a los llamados *subarmónicos*, es decir, soluciones también periódicas pero cuyo período no es el original sino un múltiplo.

Digresión: El operador de Poincaré sirve también para estudiar la estabilidad de las soluciones y, en muchos casos, el grado topológico puede resultar útil. A modo de ejemplo, se puede pensar el siguiente ejercicio: dado un sistema $x'(t) = f(x(t))$ con $f(0) = 0$, si $\deg(I - P, 0, B_r(0)) = -1$ para todo r chico, entonces 0 es un equilibrio inestable. Esto no debería ser casualidad, a la luz de otro resultado que vimos: para r chico, el grado coincide con el del sistema linealizado $x'(t) = Df(0)x(t)$ y (como dijimos), el grado de $I - P_L$ es $(-1)^n sgn(\det(Df(0))$.

La dinámica unidimensional es lo suficientemente interesante como para que si hay un punto de período 3 entonces haya puntos de todos los períodos. Esto es un caso particular del teorema de Sarkovskii, que dice que si hay un punto de período j entonces hay un punto de período k para todo $k \prec j$, donde el alocado orden $\prec$ se define de la siguiente manera:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \ldots 2.3 \succ 2.5 \succ \ldots 2^2.3 \succ 2^2.5 \succ \ldots$$

y finalmente, después de haber pasado por todos los números de la forma $2^j.k$ con k impar, aparecen las potencias de 2 en orden inverso:

$$\ldots \succ 2^n \succ \ldots \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.$$

En particular, si existe un punto periódico de cualquier período, entonces tiene que haber un punto fijo. Pero además 3 es el más grande de todos; por eso, si hay un punto de período 3 entonces hay puntos periódicos de cualquier período. Este caso especial se conoce como 'período 3 implica caos', con perdón de la involuntaria cacofonía (o más precisamente, cacafonía), porque se puede probar algo más: si hay un punto de período 3, entonces existe un conjunto no numerable S (la S viene de 'scrambled', revuelto) cuyos puntos S se van alejando y acercando indefinidamente a lo largo de las sucesivas iteraciones. En términos más precisos, si $x, y \in S$ entonces

$$\liminf_{n\to\infty} |T^n(x) - T^n(y)| = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} |T^n(x) - T^n(y)| > 0.$$

La prueba de este revoltoso resultado puede verse en [1].

Pero nuestro objetivo es bastante más modesto: sin pensar en huevos revueltos o analogías similares, vamos a intentar ver en qué casos las iteraciones nos llevan a un punto fijo (en todo caso, se trataría más bien de un huevo duro). Para eso, es útil hacerse primero una idea mediante uno de esos gráficos tan comunes en la teoría de sistemas dinámicos discretos:

La idea es clara: a partir de u_0 miramos su imagen y nos movemos horizontalmente hasta encontrarnos con la recta $y = x$. Esto define el punto u_1, luego nos movemos verticalmente para buscar su imagen y así sucesivamente. En el

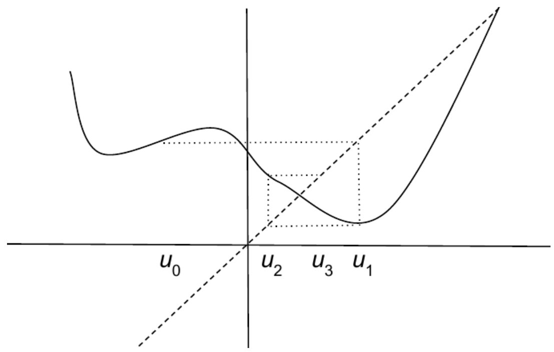


Figura 1: Rondando siempre tu esquina

caso de la Figura 1, la cosa parece marchar muy bien. Uno puede observar que la sucesión $\{u_n\}$ es algo zigzagueante, pues los signos de $u_{n+1} - u_n$ se alternan, pero eso se debe, sin duda, a que a partir de u_1 la iteración ocurre en una zona en la que T es decreciente:

$$u_{n-1} \leq u_n \Longrightarrow T(u_{n-1}) \geq T(u_n).$$

En tal aspecto, uno podría pensar que si T es creciente la sucesión va a ser más ordenada (en sentido literal). Todo depende de lo que ocurra en el punto de partida: por ejemplo, si $u_0 \leq T(u_0)$ entonces la sucesión va a ser creciente. Sin embargo, la Figura 2 muestra que puede ocurrir que exista un punto fijo, pero nos alejemos de él cada vez más.

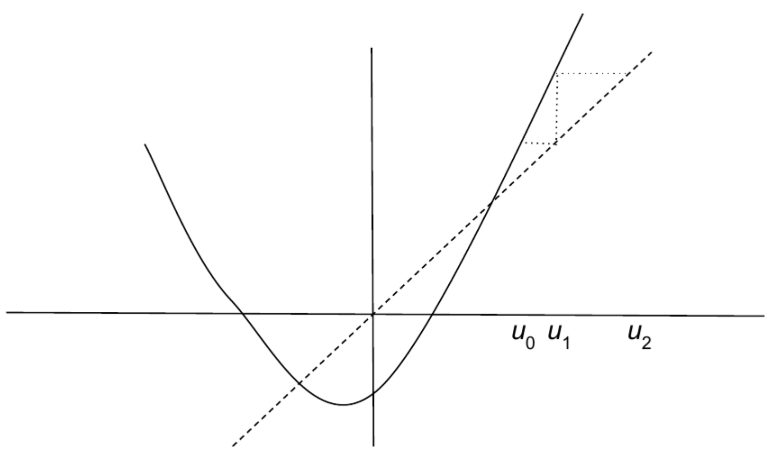
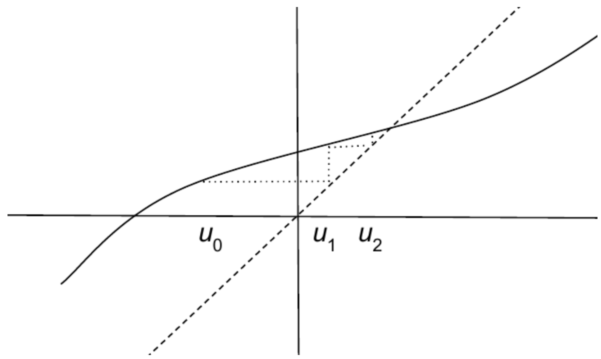


Figura 2: El punto fijo, muchachos, que hoy se va

Este último fracaso nos sugiere una situación en la que el procedimiento, esta vez sí, está condenado al éxito: ¿qué tal si $u_0 \leq T(u_0)$ y además se encuentra *antes* del punto fijo?



Claro que la última indicación no es muy práctica como hipótesis: si ya sabemos dónde está el punto fijo, no tiene mayor sentido ponernos a iterar de manera enloquecida. Sin embargo, el método también funciona si asumimos que además existe $v \geq u_0$ tal que $v \geq Tv$. En ese caso, la sucesión u_n es creciente y además se encuentra acotada, cosa que se demuestra en forma inductiva: si $u_n \leq v$ entonces $u_{n+1} \leq Tv \leq v$. Entonces la sucesión converge a cierto u, que necesariamente es un punto fijo de T, pues

$$T(u) = \lim_{n\to\infty} T(u_n) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = u.$$

En resumen, si llamamos $u_0 = \alpha$ y $v = \beta$, tenemos lo que se podría llamar una sub y una supersolución ordenadas:

$$\alpha \leq T(\alpha), \qquad \beta \geq T(\beta) \qquad \alpha \leq \beta.$$

Es claro que β nos sirvió solamente como cota superior y podría haber otros puntos fijos entre α y β: el método de iteraciones monótonas encuentra el primer punto fijo a la derecha de α. ¿Por qué el primero? La explicación es bastante obvia: un punto fijo $\hat{u} \geq u_0$ es, en particular, una supersolución; luego, por el mismo argumento de antes vale $u \leq \hat{u}$. También se hace evidente que si en lugar de comenzar en α tomamos $u_0 = \beta$, entonces se obtiene una sucesón decreciente, que converge a una solución $v \geq u$.

Cabe admitir que el método, así planteado, es algo limitado: para que funcione, necesitamos tener la enorme suerte de que T sea creciente. Sin embargo, una vez que tenemos α y β, si T es suave entonces siempre podemos sumarle un término λu para que resulte creciente en $[\alpha, \beta]$; de esta forma, transformamos el problema en uno equivalente, para el que α y β siguen siendo una sub y una supersolución:

$$u + \lambda u = T(u) + \lambda u$$

$$u = T_\lambda(u), \qquad T_\lambda(u) := \frac{T(u) + \lambda u}{1 + \lambda}.$$

Volviendo al contexto más general, esto lo podemos pensar a partir del problema original $Lu = N(u)$, para el que no hace falta preocuparse desde el comienzo por la resonancia: sea quién sea L, si encontramos λ tal que $L+\lambda I$ es inversible, entonces podemos escribir

$$u = (L + \lambda I)^{-1}(N + \lambda I)(u).$$

La tarea que tenemos por delante es algo monótona, aunque en un sentido más o menos benévolo: se trata de definir una relación de orden que nos permita decir que el operador del lado derecho de la igualdad es creciente. Por ejemplo -¿por qué no?- porque es composición de dos operadores crecientes. En las aplicaciones habituales, bajo hipótesis razonables es posible lograr que $N + \lambda I$ sea creciente en el conjunto $\{u : \alpha \leq u \leq \beta\}$, mientras que la monotonía de $(L + \lambda I)^{-1}$ se basa en alguna forma del *principio del máximo*.

Para empezar, veamos un ejemplo simple: el problema periódico

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

donde f es T-periódica en t. Supongamos que $\alpha \leq \beta$ son funciones T-periódicas tales que

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t)), \qquad \beta'(t) \geq f(t, \beta(t));$$

entonces ya sabemos desde las primeras clases que el problema tiene alguna solución T-periódica u tal que $\alpha \leq u \leq \beta$. Nos interesa ahora mostrar que u se puede obtener mediante iteraciones monótonas como las de antes, con $Lu := u'$ y $N(u) := f(\cdot, u)$. Para eso, observemos en primer lugar que si $\lambda > 0$ es suficientemente grande, entonces $N_\lambda(u) := f(\cdot, u) + \lambda u$ es creciente respecto de u: alcanza con pedir

$$\lambda \geq -\frac{\partial f}{\partial u}(t, u), \qquad (t, u) \in C,$$

donde $C \subset [0, T] \times \mathbb{R}$ es el conjunto

$$\{(t, u) : \alpha(t) \leq u \leq \beta(t)\},$$

que tiene la gran delicadeza de ser compacto y simplificarnos la vida. Por supuesto, uno no debería cometer ahora la torpeza de preguntarse si $L_\lambda := L+\lambda I$ es creciente en el siguiente sentido:

$$u \geq v \Longrightarrow L_\lambda u \geq L_\lambda v$$

o, equivalentemente, por linealidad:

$$u \geq 0 \Longrightarrow L_\lambda u \geq 0.$$

Esto es a todas luces falso aunque, como dice el tango, sin esa mentira no puedo vivir. El que resulta creciente es el operador inverso resulta creciente; tal es la versión elemental que toma el principio del máximo en este caso:

Proposición 0.1 *Sean $\lambda > 0$ y $u \in C_T^1$ tales que $u' + \lambda u \geq 0$. Entonces $u \geq 0$.*

Demostración: Sea t_0 tal que u alcanza su mínimo absoluto en t_0, entonces $0 = u'(t_0) \geq -\lambda u(t_0)$ y en consecuencia $u(t_0) \geq 0$.

$\square$

Aquí parece plantearse un pequeño intríngulis: ¿cómo puede ser que un operador sea creciente y su inversa no? La respuesta es muy sencilla: si definimos el inverso $K_\lambda : \varphi \mapsto u$, lo que probamos es: $\varphi \geq 0 \Longrightarrow K_\lambda \varphi \geq 0$, es decir, que K_λ resulta creciente pero mirado como operador de C_T en C_T. Y, en efecto, $L_\lambda : D \to C_T$ es entonces creciente, donde $D := C_T^1 \subset C_T$ (la D viene, no casualmente, de "denso").

Esto significa que podemos definir las iteraciones

$$u_0 := \alpha, \qquad u_{n+1} := K_\lambda N_\lambda(u_n)$$

y, ya que estamos,

$$v_0 := \beta, \qquad v_{n+1} := K_\lambda N_\lambda(v_n)$$

o, para decirlo de modo más explícito, u_{n+1} y v_{n+1} son las respectivas (únicas) soluciones de los siguientes problemas lineales T-periódicos:

$$u'_{n+1}(t) + \lambda u_{n+1}(t) = f(t, u_n(t)) + \lambda u_n(t),$$

$$v'_{n+1}(t) + \lambda v_{n+1}(t) = f(t, v_n(t)) + \lambda v_n(t).$$

Las observaciones anteriores deberían ya garantizar que $\{u_n\}$ es creciente y $\{v_n\}$ es decreciente, pero no está de más comprobarlo de manera directa. Para ser más precisos, veamos que $\alpha \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq \beta$ y, además, siempre se cumple que u_n es subsolución y v_n es supersolución. En efecto, alcanza con ver que u_1 es subsolución y vale $\alpha \leq u_1 \leq \beta$; de modo análogo se prueba entonces que v_1 es supersolución con $u_1 \leq v_1 \leq \beta$ y la inducción se ocupa del resto. Pero este primer paso es fácil:

$$u'_1(t) + \lambda u_1(t) = f(t, \alpha(t)) + \lambda\alpha(t) \geq \alpha'(t) + \lambda\alpha(t),$$

así que por la proposición anterior vale $u_1 \geq \alpha$. Y todavía no usamos la monotonía de N_λ, que nos sirve para probar el resto:

$$u'_1(t) + \lambda u_1(t) = f(t, \alpha(t)) + \lambda\alpha(t) \leq \beta'(t) + \lambda\beta(t),$$

de donde $u_1 \leq \beta$ y, finalmente,

$$u'_1(t) + \lambda u_1(t) = f(t, \alpha(t)) + \lambda\alpha(t) \leq f(t, u_1(t)) + \lambda u_1(t),$$

lo que prueba que $u'_1(t) \leq f(t, u_1(t))$, es decir: u_1 es subsolución.

La novedad es que, a diferencia del caso unidimensional, ahora no queda tan claro que estas sucesiones tan mononas (perdón: tan monótonas) sean convergentes. Uno podría replicar a esto diciendo que en realidad sí: para todo t, las sucesiones $\{u_n(t)\}$ y $\{v_n(t)\}$ son monótonas y acotadas en $\mathbb{R}$, así que convergen a ciertos valores $u(t)$ y $v(t)$. Es claro también que $u(t) \leq v(t)$; el problema es que esta convergencia es puntual y no en el sentido de C_T. De hecho, las funciones podrían ser en principio muy feas (por llamar así, pongamos por caso, a la discontinuidad). Aunque sea por una mera cuestión estética, vamos a ocuparnos primero de este detalle verificando, por ejemplo, que u es continua. Para esto, alcanza con observar que

$$u_{n+1}(t_1) - u_{n+1}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} [f(s, u_n(s)) + \lambda(u_n(s) - u_{n+1}(s))]\, ds$$

y, como $(s, u_n(s))$ vive siempre en aquel conjunto C que definimos antes, se deduce que

$$|u_{n+1}(t_1) - u_{n+1}(t_0)| \leq c|t_1 - t_0|$$

para cierta constante c independiente de n. Pero entonces, usando la convergencia puntual (a la que tan poca fe le teníamos, dicho sea de paso), resulta $|u(t_1) - u(t_0)| \leq c|t_1 - t_0|$, así que u es continua. Más aún, resulta Lipschitz, lo cual no debería ser una gran sorpresa ya que, en realidad, pretendemos que sea solución de nuestro problema. Porque eso tampoco es gratuito: ¿cómo saber que u satisface la ecuación?

Aquí podemos usar una de las delicias de la monotonía: el teorema de Dini, que asegura que si $u_n(t) \nearrow u(t)$ puntualmente, con u_n y u continuas, entonces la convergencia es uniforme. Para eso (¡tomar nota!) necesitamos que el dominio sea compacto. Pero entonces ya tenemos lo que queríamos, ya que

$$u_{n+1}(t) = u_n(0) + \int_0^t [f(s, u_n(s)) + \lambda(u_n(s) - u_{n+1}(s))]\, ds$$

y tomando límite de los dos lados resulta

$$u(t) = u(0) + \int_0^t f(s, u(s))\, ds.$$

El razonamiento para v es completamente análogo.[1]

La pregunta ahora es qué ocurre, como dice el tango, "cuando me entrés a fallar". Por ejemplo, ¿qué pasa si tenemos α y β están ordenadas al revés, es decir, $\alpha \geq \beta$? Nuestro largo historial de fracasos nos podría sugerir que "ya es tiempo de archivar tus ilusiones" pero, sin embargo, una nueva mirada sobre el caso general nos permite encender una lucecita de esperanza. Cuando escribimos el problema $Lu = Nu$ en la forma $u = (L + \lambda I)^{-1}(N(u) + \lambda u)$ con la idea de que el término de la derecha sea creciente, pasamos por alto un detalle: todo funciona igual de bien si los términos de la composición son decrecientes en vez de crecientes. En otras palabras, podemos tomar ahora $\lambda < 0$ y mostrar que vale un enunciado casi igual al anterior:

[1] Conviene aclarar que podríamos habernos limitado a este último paso, sin invocar el teorema de Dini. Pero para esto, claro, hace falta conocer algo de la teoría de integración de Lebesgue, que permite tomar límite de los dos lados empleando el teorema de convergencia mayorada. O incluso se puede usar, si separamos la integral en dos términos, el teorema de Beppo-Levi, llamado (¡vaya coincidencia!) de convergencia monótona.

Proposición 0.2 *Sean $\lambda < 0$ y $u \in C_T^1$ tales que $u' + \lambda u \geq 0$. Entonces $u \leq 0$.*

Esto quiere decir que si N_λ es decreciente, entonces $T_\lambda := L_\lambda^{-1} N_\lambda$ es creciente y la gracia está en que para $L\alpha \leq N(\alpha)$ vale $L_\lambda \alpha \leq N_\lambda(\alpha)$, es decir, $\alpha \geq T_\lambda(\alpha)$. Del mismo modo, obtenemos que $\beta \leq T_\lambda(\beta)$; es decir, α y β son respectivamente una super y una subsolución para el problema $u = T_\lambda u$, ordenadas como corresponde.

En definitiva, probamos que si $\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t))$ y $\beta'(t) \geq f(t, \beta(t))$ con $\alpha \leq \beta$ o $\beta \leq \alpha$, entonces cada una de las sucesiones antes definidas converge a una solución.

Observación 0.1 *Un aguafiestas podría decirnos que no valía la pena meterse con eso del orden inverso, ya que si definimos $v(t) = u(-t)$ entonces el problema se transforma en*

$$v'(t) = -f(-t, v(t)).$$

De esta forma, si $\alpha \geq \beta$, podemos definir $\hat{\alpha}(t) := \beta(-t)$ y $\hat{\beta}(t) := \alpha(-t)$, que son una sub y una supersolución para el nuevo problema y además $\hat{\alpha} \leq \hat{\beta}$. Claro que este comentario no se aplica si el problema es de segundo orden: las razones de esto son evidentes pero, como veremos, sus implicaciones son bastante profundas.

Un poco a contramano de aquella sabia frase que dice “equipo que gana no se toca”, vamos a revisar más a fondo el ejemplo anterior, para entender mejor las razones de nuestro resultado exitoso. Entre otras cosas, al asumir el orden “natural” de C_T pasamos por alto varios detalles cruciales que es preciso ajustar a la hora de lidiar con el modelo abstracto $u = Tu$, donde $T : X \to X$ es un operador en un espacio de Banach. En principio, para decir que T es creciente, necesitamos un orden en X, es decir: una relación $\leq$ reflexiva, antisimétrica y transitiva, que además sea compatible con las operaciones, vale decir:

$$x \leq y \Longrightarrow \begin{cases} x + z \leq y + z & \forall\, z \in X \\ cx \leq cy & \forall\, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}. \end{cases}$$

Es claro que en este caso el conjunto de elementos no negativos

$$\mathcal{C} := \{x \in X : x \geq 0\}$$

es lo que se denomina un *cono*: un conjunto convexo que además verifica

- $\mathcal{C} + \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$.
- $\mathcal{C} \cap -\mathcal{C} = \{0\}$.

La primera de las propiedades no es más que una forma canchera de decir que si $x \in \mathcal{C}$ entonces toda la semirrecta $\{cx : c \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ está contenida en $\mathcal{C}$, mostrando de esta forma que uno conoce el principio de Arquímedes: en efecto, por inducción la propiedad $\mathcal{C} + \mathcal{C} \subset \mathcal{C}$ implica que $nx \in \mathcal{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y usando que $0 \in \mathcal{C}$, el resultado se deduce de la convexidad. La recíproca es obvia, ya que para $x, y \in \mathcal{C}$ por convexidad vale que $\frac{x+y}{2} \in \mathcal{C}$ y luego $x+y \in \mathcal{C}$. Queda ahora como entretenimiento para el lector comprobar que un cono siempre define un orden compatible, dado por

$$x \leq y \iff y - x \in \mathcal{C}.$$

La pregunta ahora es: ¿qué necesitamos para poder asegurar como antes que si $\alpha \leq \beta$ verifican $\alpha \leq T(\alpha)$ y $\beta \geq T(\beta)$ entonces existe un punto fijo entre α y β? Alguien que recién se conecta al zoom podría decir: "ah, es el teorema de Bolzano", pero es claro que el asunto no es tan sencillo. En primer lugar: ¿qué quiere decir "entre α y β"? Cuando $X = \mathbb{R}$ todo resulta bastante trivial ya que $\{\alpha \leq u \leq \beta\}$ coincide con $[\alpha, \beta]$, pero en general se trata de conjuntos diferentes: el primero es un convexo que claramente contiene al segundo. El tema es que necesitamos que el orden sea compatible con la topología, es decir:

$$x_n \leq y, x_n \to x \Longrightarrow x \leq y.$$

Esto no es otra cosa que decir que $\mathcal{C}$ es cerrado, y tiene como consecuencia el hecho de que el conjunto $\{\alpha \leq u \leq \beta\}$ es cerrado. Esto es una gran noticia, porque nuestras iteraciones monótonas definen secuencias precisamente dentro de ese conjunto. Pero vamos a necesitar algo más ya que, a diferencia de $\mathbb{R}$, no tiene por qué ocurrir que una sucesión monótona sea convergente, por más que se encuentre "acotada" entre α y β. Y aquí las comillas tienen su explicación, porque hace falta una hipótesis adicional, a fin de poder asegurar que una sucesión acotada en el sentido del orden también lo es en el sentido de la norma.

Definición 0.2 *Un cono cerrado $\mathcal{C} \subset X$ se dice normal si existe una constante c tal que si $0 \leq x \leq y$ entonces $\|x\| \leq c\|y\|$.*

Es claro que antes no nos dimos cuenta de esto porque la familia de espacios en los que trabajamos es "una familia muy normal": en particular, antes empleamos en C_T el orden que se define de manera puntual, que resulta compatible y satisface la definición anterior con $c = 1$. Aun así, no es cierto que si una sucesión es creciente y acotada, entonces converge: entonces, ¿cómo fue que anduvo tan bien el ejemplo anterior?

La respuesta a esta pregunta es clave y corresponde a una propiedad que nos va a acompañar por el resto de la materia: la compacidad. En el ejemplo concreto lo disimulamos un poco, pero en el fondo hicimos uso de ella al escribir la solución de manera integral. En general, un operador continuo $T : X \to X$ se dice compacto cuando $\overline{T(B)}$ es compacto para cualquier bola B o, equivalentemente, cuando para cualquier sucesión acotada $\{u_n\}$ la sucesión $\{T(u_n)\}$ tiene alguna subsucesión convergente.

Proposición 0.3 *Sea X un espacio de Banach, sea $\mathcal{C} \subset X$ un cono cerrado y normal y sea $\leq$ el orden inducido por $\mathcal{C}$. Sea $T : X \to X$ creciente y compacta y supongamos que existen $\alpha \leq \beta$ tales que $\alpha \leq T(\alpha)$ y $\beta \geq T(\beta)$. Entonces las sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ definidas antes convergen a puntos fijos de T en el conjunto $\{\alpha \leq u \leq \beta\}$.*

Demostración: Ya sabemos que $\{u_n\}$ es creciente y $u_n \leq \beta$. Por normalidad, eso quiere decir que $\|u_n\| \leq c\|\beta\|$ para todo n. Luego existe una subsucesión u_{n_j} que converge a cierta u. Para cada n podemos tomar $j(n)$ el máximo valor tal que $n_{j(n)} \leq n$, entonces $n_{j(n)} \to \infty$ y vale

$$u_{n_{j(n)}} \leq u_n \leq u_{n_{j(n)+1}}.$$

De esta forma, para ver que $u_n \to u$ alcanza con probar la propiedad del sandwich, es decir: si $a_n \leq b_n \leq c_n$ y $a_n \to x$, $c_n \to x$, entonces $b_n \to x$. Pero esto es claro, porque

$$0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n \Longrightarrow \|b_n - a_n\| \leq c\|c_n - a_n\| \to 0.$$

□

Para el problema de segundo orden, uno empieza a encontrarle sentido a escribir el operador lineal en la forma $Lu = -u''$. Por ejemplo si se trata de Dirichlet, esto es porque de esta forma L resulta positivo para el producto interno de L^2: si $u(0) = u(T) = 0$ entonces

$$\langle Lu, u\rangle = -\int_0^T u''(t)u(t)\,dt = \int_0^T u'(t)^2\,dt \geq 0.$$

Pero uno sospecharía que esto tiene que ver con el principio del máximo, cuya versión elemental podría ser la siguiente:

Proposición 0.4 *Sea $\lambda \geq 0$. Si $-u'' + \lambda u \geq 0$ y $u(0), u(T) \geq 0$ entonces $u \geq 0$.*

Para la demostración, uno podría suponer por ejemplo que u alcanza un mínimo en $t_0 \in (0, T)$, entonces $0 \leq u''(t_0) \leq \lambda u(t_0)$, lo que obliga a que $u(t_0) \geq 0$. Esto no funciona cuando $\lambda = 0$, aunque en este caso el resultado es inmediato porque entonces u es cóncava.

Observación 0.3 *El resultado se puede probar de manera más general; de hecho, sigue valiendo para $\lambda > -\lambda_1$, donde $\lambda_1 > 0$ es el primer autovalor (¡ejercicio!). Para condiciones periódicas o de Neumann, hay que pedir justamente $\lambda > 0$, porque en ambos casos se tiene $\lambda_1 = 0$.*

De esta forma se llega al resultado de super y subsoluciones que ya conocemos, con la novedad de que ahora podemos obtener las soluciones iterando.

Proposición 0.5 *Sean $\alpha \leq \beta$ tales que*

$$-\alpha''(t) \leq f(t, \alpha(t)), \qquad -\beta''(t) \geq f(t, \beta(t)),$$

$$\alpha(0), \alpha(T) \leq 0 \leq \beta(0), \beta(T).$$

Entonces las sucesiones definidas por $u_0 := \alpha$, $v_(0) := \beta$ y

$$-u''_{n+1}(t) + \lambda u_{n+1}(t) = f(t, u_n(t)) + \lambda u_n(t),$$

$$u_{n+1}(0) = u_{n+1}(T) = 0,$$
$$-v''_{n+1}(t) + \lambda v_{n+1}(t) = f(t, v_n(t)) + \lambda v_n(t),$$
$$v_{n+1}(0) = v_{n+1}(T) = 0$$

para λ *como antes, convergen a soluciones del problema*

$$-u''(t) = f(t, u(t)), \qquad u(0) = u(T) = 0.$$

References

[1] Li-Yorke https://www.its.caltech.edu/ matilde/LiYorke.pdf